



# Estratégias para definição da seção resistente de vigas pré-fabricadas de edifícios com pré-tração

*Angelo Rubens Migliore Junior*

*Migliore & Pastore Engenharia Ltda., Prof. Dr. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas Unilins/Sociesc*  
[rubens.migliore@hotmail.com](mailto:rubens.migliore@hotmail.com)

# 1. Vigas usuais de edifícios de CPM

Para reduzir custos, procura-se:

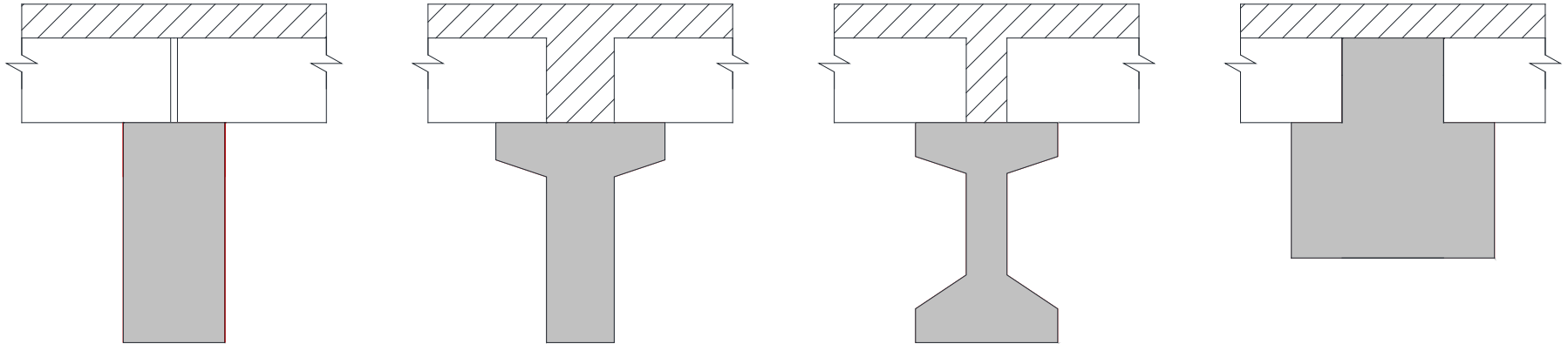
- ✓ Minimizar o número de ligações de extremidade;
- ✓ Minimizar o número de restrições nas ligações.

→ *Em geral, vigas bi-articuladas com maiores vãos.*

Ex.: 2 vigas com mesma seção, mesma vinculação e mesmo carregamento onde  $L_2 = 2 \times L_1$  resulta:

$$M_2 = 4 \times M_1 \quad e \quad \text{flecha } a_2 = 16 \times a_1$$

# Seções típicas de vigas de edifícios



a) Seção retangular  
sem solidarização

b) Seção T para  
apoio de laje

c) Seção duplo T

d) Seção T invertido

*Escolha da seção depende de condições estéticas, de disponibilidade de formas e de experiência anterior sendo regida por tentativa e erro, em geral.*

## **2. Concreto armado x protendido**

Concreto armado fissura e sofre fluência → promove aumento significativo de flecha;

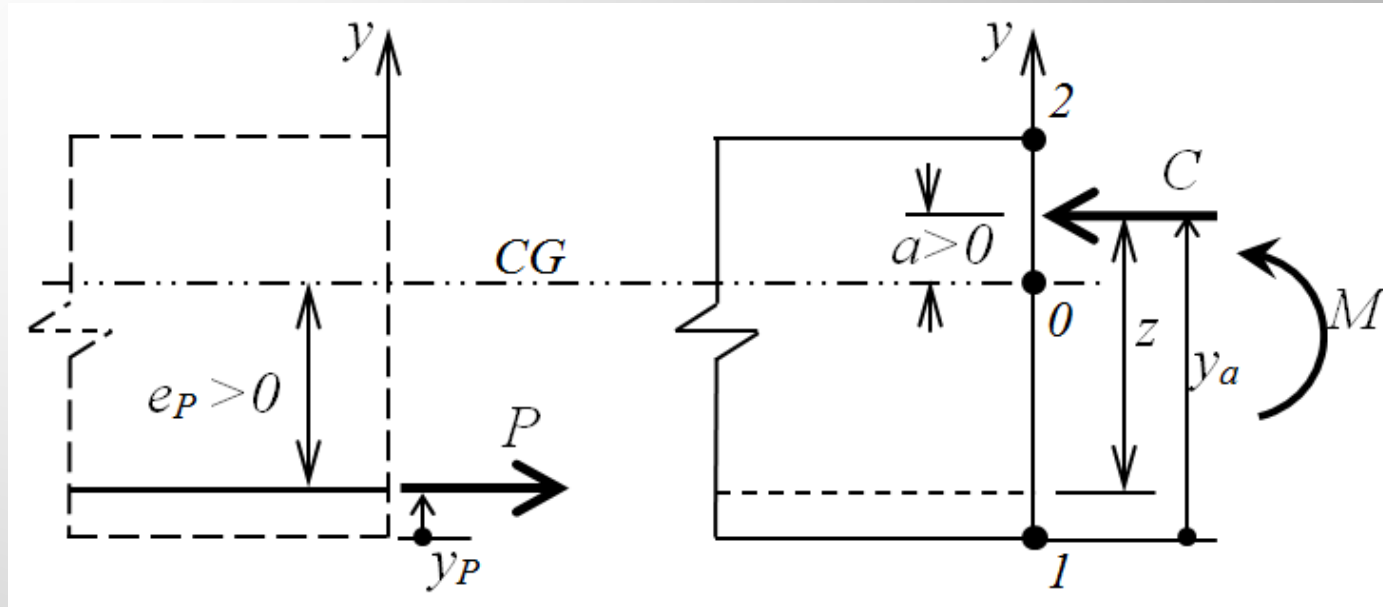
Protensão pode minimizar ou eliminar fissuras.

### ***Protensão***

Pré-tração com cabos retos e nós simplifica a produção → usual em pré-fabricados de concreto;

Pós-tração com cabos curvos é mais eficiente → acompanha o andamento de solicitação de flexão; bainha protege melhor contra a corrosão.

# Equilíbrio interno da seção protendida



Cabo de protensão

Seção de concreto

- Variando  $M$  ou  $P$  ao longo do tempo ou do vão, varia o centro de pressão  $y_a$ , mas sempre  $C = P$ .
- Aumentando a altura da seção, a excentricidade  $e_P$  varia, mas a coordenada  $y_P$  é mantida constante.

### 3. Tensões elásticas no concreto

Para uma determinada etapa construtiva, para uma determinada força de protensão e com o sistema de coordenadas utilizado, pode-se obter para a seção meio do vão (onde  $\sigma > 0$  indica tração):

$$\sigma_0 = -\frac{P}{A_C}$$

$$\sigma_1 = -P \left[ \frac{1}{A_C} + \frac{(y_0 - y_P)}{W_1} \right] + \frac{M}{W_1}$$

$$\sigma_2 = -P \left[ \frac{1}{A_C} - \frac{(y_0 - y_P)}{W_2} \right] - \frac{M}{W_2}$$

## a) Ato de protensão

$$P = \gamma_{pi} P_0$$

$\gamma_{pi}$  representa a perda imediata da força inicial  $P_0$ ;

$$y_{a0} = \frac{M_0}{\gamma_{pi} P_0} + y_P$$

→ usual: 5% a 10 % (0,95 a 0,90)

$$\sigma_{00} = -\gamma_{pi} \frac{P_0}{A_{CS}}$$

$M_0 \rightarrow$  ação  $g_0$

$S \rightarrow$  seção inicial

$$\sigma_{10} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} + \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{1S}} \right] + \frac{M_0}{W_{1S}} \geq \sigma_{\min, j}$$

$i, j \rightarrow$  fibra, etapa

$$\sigma_{20} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} - \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{2S}} \right] - \frac{M_0}{W_{2S}} \leq \sigma_{\max, j}$$



## ***Tensões limites admissíveis***

Tensões algébricas para uma determinada idade e uma determinada combinação de carregamento (Protensão Completa ou Limitada):

$$\sigma_{\max,j} = 1,2 \left( 0,7 f_{ctj} \right) = 0,84 f_{ctj} \quad (\text{ELS-F})$$

$$\sigma_{\min,j} = -0,7 f_{cj} \quad (\text{ELS-CE})$$

Resistências do concreto jovem na idade  $j$  em valor absoluto (em geral, 60% do valor aos 28 dias).



## b) Montagem da estrutura

$$y_{a1} = \frac{M_0 + M_1}{\gamma_{pi} P_0} + y_P$$

Seção simples com  
acrécimo da ação  $g_1$   
→  $M_1$  altera o centro  
de pressão  $y_a$

$$\Delta\sigma_0 = 0 \quad \rightarrow \sigma_{01} = -\frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CS}}$$

$$\Delta\sigma_1 = \frac{M_1}{W_{1S}} \quad \rightarrow \sigma_{11} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} + \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{1S}} \right] + \frac{M_0 + M_1}{W_{1S}}$$

$$\Delta\sigma_2 = -\frac{M_1}{W_{1S}} \quad \rightarrow \sigma_{21} = -\gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CS}} - \frac{(y_{0S} - y_P)}{W_{2S}} \right] - \frac{M_0 + M_1}{W_{2S}}$$

## ***Consideração de perdas progressivas***

Após endurecimento do concreto, há nova alteração do centro de pressão. Instante crítico → tempo infinito com redução da protensão pelas perdas progressivas.

$$\Delta P_i = (1 - \gamma_{pi}) P_0; \quad \Delta P_p = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0$$

$\gamma_{pp}$  representa a perda progressiva a partir da etapa anterior;

→ usual: 10% a 20 % (0,90 a 0,80)

## c) Solidarização de mesa adicional

$$\Delta\sigma_0 = (1 - \gamma_{pp}) \frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CF}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{02} = \frac{y_{0F}}{y_{0S}} \sigma_{01} + \left(1 - \frac{y_{0F}}{y_{0S}}\right) \sigma_{11} + (1 - \gamma_{pp}) \frac{\gamma_{pi} P_0}{A_{CF}}$$

$$\Delta\sigma_1 = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} + \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{1F}} \right] + \frac{M_2}{W_{1F}}$$

$$\rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{11} + (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} + \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{1F}} \right] + \frac{M_2}{W_{1F}} \leq \sigma_{\max}$$

$$\Delta\sigma_2 = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}}$$

$$\rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{21} + (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}} \geq \sigma_{\min}$$

## **Relações geométricas**

$S \rightarrow$  seção inicial (simples)

$F \rightarrow$  seção final (simples ou composta)

$$k_y = \frac{y_{0F}}{y_{0S}}; \quad k_A = \frac{A_{CF}}{A_{CS}}; \quad k_{W1} = \frac{W_{1F}}{W_{1S}}; \quad k_{W2} = \frac{W_{2F}}{W_{2S}}$$

$$I = y_0 W_1 = (h_S - y_0) W_2 = (h_F - y_0) W_4$$

$k \rightarrow$  varia entre 1,2 e 3,0 para peças compostas usuais de edifícios

## ***Tensões limites finais***

Para o caso de CAA-III:

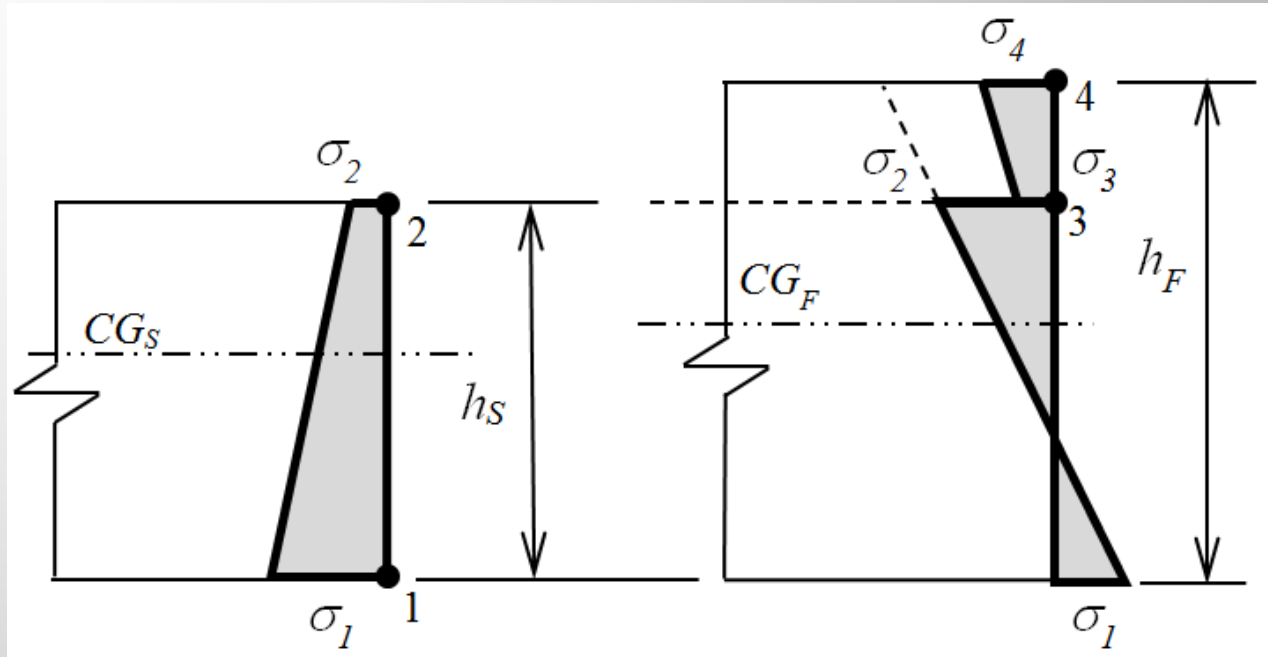
$$\sigma_{\max} = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{para CFQ} & \rightarrow \text{Prot. Completa} \\ 0,84 f_{ctk} & \rightarrow \text{para CR} & \rightarrow \text{Prot. Limitada} \end{cases}$$
$$\sigma_{\min} = -0,7 f_{ck} \rightarrow \text{para CR}$$

Devido à corrosão, para CAA-I é prudente:

$$\sigma_{\max} = 1,2 f_{ctk} \rightarrow \text{para CR} \rightarrow \text{Prot. Limitada}$$

# Tensões na mesa adicional

Tensões  
parciais



Tensões  
finais

$$\sigma_{32} = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{2F}} \right] - \frac{M_2}{W_{2F}} \leq \sigma_{\max M} = 0,84 f_{ctk M}$$

$$\sigma_{42} = (1 - \gamma_{pp}) \gamma_{pi} P_0 \left[ \frac{1}{A_{CF}} - \frac{(y_{0F} - y_P)}{W_{4F}} \right] - \frac{M_2}{W_{4F}} \geq \sigma_{\min M} = -0,7 f_{ck M}$$

## 4. Módulo resistente mínimo

a) Borda inferior da pré-viga (entre etapas 0 e 2)

$$\gamma_{pi}\gamma_{pp}P_0 \left\{ \frac{1}{A_{CS}} \left( 1 - \frac{1}{k_A} \right) + \frac{1}{W_{1S}} \left[ y_{0S} \left( 1 - \frac{k_y}{k_{W1}} \right) - y_P \left( 1 - \frac{1}{k_{W1}} \right) \right] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{W_{1S}} \left[ (1 - \gamma_{pp})M_0 + M_1 + \frac{M_2}{k_{W1}} \right] = -\gamma_{pp}\sigma_{\min,j} + \sigma_{\max}$$

Ordenando e simplificando:

$$W_{1S} \geq \frac{(1 - \gamma_{pp})M_0 + M_1 + \frac{M_2}{k_{W1}}}{\gamma_{pp} \left[ -\sigma_{\min,j} - \frac{\gamma_{pi}P_0}{A_{CS}} \left( 1 - \frac{1}{k_A} \right) \right] + \sigma_{\max}}$$



## 4. Módulo resistente mínimo

### a) Borda inferior da pré-viga

adoptando:  $\gamma_{pi} \frac{P_0}{A_{CS}} \left(1 - \frac{1}{k_A}\right) \approx 0,1 f_{cj} \approx f_{ctj}$  para  $k_A \approx 1,5$

$$W_{1S} \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_{CFQ^*} + \left(1 - \frac{1}{k_{W1}}\right) M_1}{0,6 k_{W1} \gamma_{pp} f_{cj}} \\ \frac{M_{CR^*} + \left(1 - \frac{1}{k_{W1}}\right) M_1}{k_{W1} (0,6 \gamma_{pp} f_{cj} + 0,84 f_{ctk})} \end{array} \right.$$

$M_{C^*} \rightarrow$  momentos para determinada combinação sem a parcela  $M_0$

## 4. Módulo resistente mínimo

b) Borda superior da pré-viga

$$W_{2S} \geq \frac{M_{CR*} + \left(1 - \frac{1}{k_{W2}}\right) M_1}{k_{W2} (1,84 \gamma_{pp} f_{ctj} + 0,7 f_{ck})}$$

Impondo  $k_W$ , fica determinado  $W_F$  a partir de  $W_S$ :

$$W_{1F} \geq k_{W1} \cdot W_{1S}$$

$$W_{2F} \geq k_{W2} \cdot W_{2S}$$

## 5. Exemplos de aplicação

Viga pré-fabricada típica de edifício comercial com vão teórico de 7 m, CAA III, ações linearizadas de laje alveolar com vão de 10 m de cada lado da peça ( $g_0$  desconhecido):

$$g_1 = 50 \text{ kN/m}; \quad g_2 = 15 \text{ kN/m}; \quad q = 30 \text{ kN/m}$$

Condições adicionais impostas:

$$f_{ck} = 40,0 \text{ MPa};$$

$$f_{ctk} = 3,5 \text{ MPa}$$

$$f_{cj} = 24,0 \text{ MPa};$$

$$f_{ctj} = 2,5 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{pi} = 0,95;$$

$$\gamma_{pp} = 0,85$$

## 5.1. Exemplo 1 – Retangular sem mesa

$$W_{1S} \geq \begin{cases} \frac{50.800}{0,7 \times 0,85 \times 2,4} = 35.574 \text{ cm}^3 \\ \frac{58.200}{0,7 \times 0,85 \times 2,4 + 0,84 \times 0,35} = 33.798 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

$$W_{2S} \geq \frac{58.200}{0,84 \times 0,85 \times 0,25 + 0,7 \times 4} = 22.999 \text{ cm}^3$$

Em geral,  $W_1 > W_2 \rightarrow$

*T invertido é melhor !*

Seção retangular 40x80cm<sup>2</sup>:

$$A_{CS} = 3.200 \text{ cm}^2; \quad W_{1S} = 42.667 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 42.667 \text{ cm}^3$$

## 5.1. Exemplo 1 – Retangular sem mesa

Protensão superior: 4 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm  
Protensão inferior: 17 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,945$   
Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,860$

Tabela 1 – Tensões elásticas (MPa) para cada situação de projeto

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
2	+1,0	-10,9	-12,5
1	-10,6	+2,3	+4,0

Tensões calculadas no Estádio I com a seção homogeneizada considerando apenas armadura ativa.

## **5.2. Exemplo 2 – Duplo T sem mesa**

Alma de 15x90cm<sup>2</sup> e mesas com largura de 38cm:

$$A_{CS} = 1.969 \text{ cm}^2; \quad W_{1S} = 41.056 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 39.825 \text{ cm}^3$$

Viga otimizada sem acréscimo de mesa superior adicional:

- apesar de maior altura, menor volume (e, portanto, menor peso);
- menor consumo de protensão em razão da maior altura útil e da maior compressão no Centro Geométrico, devido à menor área bruta de concreto.

## 5.2. Exemplo 2 – Duplo T sem mesa

Protensão superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm

Protensão inferior: 13 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,935$

Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,850$

Tabela 2 – Tensões elásticas (MPa) para cada situação de projeto

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
2	+1,2	-11,5	-13,3
1	-13,3	+1,9	+3,6



## 5.3. Exemplo 3 – Retangular com mesa

Com  $k_W = 2,0$ :

$$W_{1S} \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{50.800 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{0,6 \times 2,0 \times 0,85 \times 2,4} = 27.007 \text{ cm}^3 \\ \frac{58.200 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{2,0 \times (0,6 \times 0,85 \times 2,4 + 0,84 \times 0,35)} = 24.214 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

$$W_{2S} \geq \frac{58.200 + \left(1 - \frac{1}{2,0}\right) 30.625}{2,0 (1,84 \times 0,85 \times 0,25 + 0,7 \times 4,0)} = 11.519 \text{ cm}^3$$

Seção 40x80cm<sup>2</sup> ; mesa (C30) h=20 e b=90 cm:

$$A_{CS} = 2.800 \text{ cm}^2 ;$$

$$W_{1S} = 32.667 \text{ cm}^3 ;$$

$$W_{2S} = 32.667 \text{ cm}^3$$

## 5.3. Exemplo 3 – Retangular com mesa

Protensão superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm

Protensão inferior: 14 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,940$

Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,870$

Tabela 3 – Tensões elásticas (MPa) para cada situação de projeto

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
4	- - -	-2,7	-3,6
3	- - -	-1,2	-1,6
2	+2,0	-8,1	-8,5
1	-10,3	+2,0	+4,1

## 5.4. Exemplo 4 – Duplo T com mesa

Alma de 12x80cm<sup>2</sup> e mesas com largura de 38cm:

$$A_{CS} = 1.534 \text{ cm}^2; \quad W_{1S} = 25.380 \text{ cm}^3; \quad W_{2S} = 28.898 \text{ cm}^3$$

Viga otimizada com acréscimo de mesa superior adicional:

- apesar de maior altura, menor volume (e, portanto, menor peso);
- menor consumo de protensão em razão da maior altura útil e da maior compressão no Centro Geométrico, devido à menor área bruta de concreto.

## 5.4. Exemplo 4 – Duplo T com mesa

Protensão superior: 4 fios CP-150 RN  $\phi$  6.0mm

Protensão inferior: 12 cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  9.5mm

Perda imediata:  $\gamma_{pi} = 0,910$

Perda progressiva:  $\gamma_{pp} = 0,840$

Tabela 4 – Tensões elásticas (MPa) para cada situação de projeto

Borda	Ato de protensão 0	CFQ 1	CR 2
4	- - -	-2,7	-3,6
3	- - -	-0,8	-1,2
2	+2,1	-9,1	-9,4
1	-15,5	+2,5	+4,2

## **6. Conclusões**

- a) Definir  $f_c$  e  $f_{ct}$  nas idades  $j$  e 28 dias;
- b) Definir Classe de Agressividade Ambiental (maior exigência para o ELS-F quanto maior agressividade);
- c) Definir combinações Quase Permanente e Rara, mesmo sem conhecer a ação de peso próprio  $g_0$  da peça;
- d) Adotar perdas e relações entre as propriedades geométricas da seção inicial e final da viga;
- e) Determinar  $W_{min}$  segundo as inequações apresentadas;
- f) Escolher forma e geometria da seção da viga, lembrando que a protensão deverá ser tanto maior quanto os módulos resistentes adotados estiverem mais próximos dos valores mínimos determinados;

## **6. Conclusões**

- g) Calcular o momento fletor de peso próprio  $M_0$ ;
- h) Adotar armadura de protensão inferior e, eventualmente, superior para compensar a pouca liberdade na posição vertical dos cabos de protensão;
- i) Estimar perdas de protensão inicial e progressiva;
- j) Calcular as propriedades geométricas da seção transversal homogeneizada no Estádio I simples e composta, incluindo a armadura ativa e, eventualmente, passiva;
- k) Verificar tensões nas bordas extremas da peça para cada etapa construtiva e para cada combinação de carregamento.



***Grato pela atenção.***

*Prof. Dr. Angelo Rubens Migliore Junior*

[rubens.migliore@hotmail.com](mailto:rubens.migliore@hotmail.com)